

2 RS 46114

THREE YEAR B.A./B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL/MAY 2024.

FOURTH SEMESTER

Mathematics

Paper IV – REAL ANALYSIS

(w.e.f. 2020-21 Admitted Batch)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

(No additional sheet will be supplied)

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE of the following questions.

Each question carries 5 marks.

ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

1. Test for convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{n}\right)$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{n}\right)$ యొక్క అభిసరణతను పరిక్షించండి.

2. Test the convergence of $\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.5} + \frac{1.3.5}{2.5.8} + \dots$

$\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.5} + \frac{1.3.5}{2.5.8} + \dots$ యొక్క అభిసరణతను పరిక్షించండి.

3. If $f: R \rightarrow R$ defined by $f(x) = x$ if $x \in R - Q$ and $f(x) = -x$ if $x \in Q$ is continuous only at '0'.

$f: R \rightarrow R$ గా నిర్వచించినట్లయితే $f(x) = x; x \in R - Q$ మరియు $f(x) = -x; x \in Q$; $x = 0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

4. Discuss the continuity of the function $f(x) = \frac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ at origin.

$f(x) = \frac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$; $x \neq 0$ మరియు $f(0) = 0$ యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను పరిక్షించండి.

5. Show that $f(x) = x \tan^{-1} \frac{1}{x}$, if $x \neq 0$ and $f(0) = 0$ is not derivable at $x = 0$.

$x = 0$ వద్ద $f(x) = x \tan^{-1} \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ అయితే $f(0) = 0$ అయినచో అవకలసీయము కాదని చూపండి.

6. Using Lagrange's theorem, show that $x > \log(1+x) > \frac{x}{1+x}$ if $f(x) = \log(1+x) \forall x > 0$.

$\forall x > 0$ మరియు $f(x) = \log(1+x)$ అయినప్పుడు లాగ్రాంజ్ సిద్ధాంతంను ఉపయోగించి $x > \log(1+x) > \frac{x}{1+x}$ అనిచూపండి.

7. If $f(x) = 2x - 1$ on $[0, 1]$ and $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$, then find $U(P, f)$ and $L(P, f)$.

$[0, 1]$ పై $f(x) = 2x - 1$ మరియు $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ అయితే, $U(P, f)$ మరియు $L(P, f)$ ని కనుగొనండి.

8. If $f: [a, b] \rightarrow R$ is continuous on $[a, b]$ then f is R -Integrable on $[a, b]$.

$f: [a, b] \rightarrow R$ అనేది $[a, b]$ పై అవిచ్ఛిన్నం అయితే f అనేది $[a, b]$ పై R -సమకలనీయము.

9. If $f \in R[a, b]$ then prove that $|f| \in R[a, b]$.

$f \in R[a, b]$ అయితే $|f| \in R[a, b]$ అని నిరూపించండి.

10. If $f \in R[a, b]$ then $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

$f \in R[a, b]$ అయితే $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 10 marks.

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.

11. State and prove D'Alembert's test.

D-అలెంబర్ట్ పరీక్షను వివరించి నిరూపించండి.

Or

12. Test the Convergence of $\sum \frac{x^n}{x^n + a^n}$ ($x > 0, a > 0$).

$\sum \frac{x^n}{x^n + a^n}$ ($x > 0, a > 0$) యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

13. Let $S = R - \{0\} \rightarrow R$ is defined as $f(x) = \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$ then show that $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ does not exist.

$S = R - \{0\} \rightarrow R$ ను $f(x) = \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$ గా నిర్వచిస్తే $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ వ్యవస్థితం కాదు అని చూపండి.

Or

14. If f is continuous on $[a, b]$ then prove that f is bounded on $[a, b]$.

f అవిచ్ఛిన్నం అయితే $[a, b]$ మీద f పరిబద్ధము అని చూపండి.

15. Show that $f(x)=|x-1|+|x-2|$ is continuous but not derivable at $x=1$ and $x=2$.

$f(x)=|x-1|+|x-2|$ అయితే అవిచ్ఛిన్న మౌతుంది, కానీ $x=1$ మరియు $x=2$ వద్ద అవకలనము కాదని చూపండి.

Or

16. State and prove Cauchy's mean value theorem.

కోషి మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించండి.

17. If $f \in R[a, b]$ and m, M are the infimum and supremum of f on $[a, b]$ then $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

$f = [a, b] \rightarrow R$ మరియు $[a, b]$ లో గరిష్ఠ దిగువ హద్దు f , కనిష్ఠ ఎగువ హద్దు f లు m, M లు అయితే, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ అని నిరూపించండి.

Or

18. Show that $f(x)=3x+1$ is integrable on $[1, 2]$ and $\int_1^2 (3x+1) dx = \frac{11}{2}$.

$[1, 2]$ మీద $f(x)=3x+1$ సమాకలనము అయినప్పుడు $\int_1^2 (3x+1) dx = \frac{11}{2}$ అని చూపండి.

19. State and prove fundamental theorem of Integral Calculus.

సమాకలన ప్రాథమిక సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి, నిరూపించండి.

Or

20. Prove that $\frac{\pi^3}{24} \leq \int_0^\pi \frac{x^2}{5+3\cos x} dx \leq \frac{\pi^3}{6}$.

$\frac{\pi^3}{24} \leq \int_0^\pi \frac{x^2}{5+3\cos x} dx \leq \frac{\pi^3}{6}$ అని చూపండి.